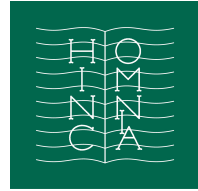




UNIwersytet  
Warszawski



---

Year: 2023

---

## A-polynomials, symmetries and permutohedra for quivers and knots

Carrillo, Helder Larraguivel

Posted at The Institutional Repository of the University of Warsaw  
ReIn UW: <https://repozytorium.uw.edu.pl/handle/item/4448>  
Unique UUID of the publication: 6f79011c-7c9a-45ce-b952-aa63d444841f

# Wielomiany $A$ , symetrie i permutohedrony dla kołczanów i węzłów

*Streszczenie pracy doktorskiej*

Hélder David Larraguível Carrillo

*Promotor: Prof. Piotr Sułkowski*

Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski

ul. Pasteura 5, 02-093 Warszawa, Polska

14 czerwca 2022

Teoria strun została zaproponowana w latach 70. XX wieku jako kandydatka na teorię unifikującą mechanikę kwantową i ogólną teorię względności. Od tego czasu znaleziono także wiele jej związków z różnymi dziedzinami matematyki. Jednym z interesujących aspektów teorii strun jest to, że przewiduje ona wiele nowych dualności między teoriami fizycznymi. Dzięki tym dualnościom byliśmy na przykład w stanie uzyskać głębsze zrozumienie nieperturbacyjnych efektów w różnych kwantowych teoriach pola. Pojęcie dualności jest na tyle rozległe, że do dziś fizycy i matematycy poświęcają całe swoje życie ich badaniu.

Ważnym przykładem dualności jest dualność między trójwymiarową teorią Cherna-Simonsa [1–3], a supersymetryczną trójwymiarową teorią cechowania typu  $\mathcal{N} = 2$  [4–7]. Na pierwszy rzut oka są to dwie zupełnie niepowiązane ze sobą teorie. Teoria Cherna-Simonsa jest topologiczną teorią pola. Obserwable w tej teorii to pętle Wilsona, które mogą być nietrywialnie zapętlone, a ich wartości oczekiwane odtwarzają niezmienniki węzłów. Z drugiej strony, teorie typu  $\mathcal{N} = 2$  to supersymetryczne teorie cechowania z wieloma oddziałującymi polami (skalarnymi, wektorowymi, spinorowymi). Jedną z istotnych obserwacji dla takich teorii jest ich indeks<sup>1</sup>. Ponieważ indeks jest wielkością zachowaną, może on dostarczać informacji także o nieperturbacyjnych własnościach teorii; w tym przypadku zlicza on liczbę stanów/cząstek BPS (Bogomol’nyi-Prasad-Sommerfeld) o danym spinie.

---

<sup>1</sup>Indeks to wartość oczekiwana operatora  $(-1)^F$ , gdzie  $F$  zlicza liczbę fermionów. Biorąc pod uwagę, że w teoriach supersymetrycznych prawie wszystkie stany tworzą pary, stany te znoszą się nawzajem, a jedyny wkład do indeksu mają stany, które nie mają pary fermionowej. Stany bez par fermionowych nazywane są stanami BPS [8].

Ważnym przejawem wspomnianej dualności jest to, że funkcję generującą wartości oczekiwane pętli Wilsona w teorii Cherna-Simonsa, pokolorowanej przez wszystkie symetryczne reprezentacje, można przepisać jako indeks BPS trójwymiarowej teorii typu  $\mathcal{N} = 2$ . W szczególności, wartości oczekiwane pętli Wilsona w teorii Cherna-Simonsa z grupą cechowania  $SU(2)$  w jej symetrycznych reprezentacjach (kolorach) odtwarzają słynny kolorowy wielomian Jonesa [9, 10]. Kolorowy wielomian Jonesa można uogólnić do kolorowego wielomianu HOMFLY-PT (Hoste, Ocneanu, Millett, Freyd, Lickorish, Yetter, Przytycki i Traczyk) [11, 12]. Funkcję generującą dla tych wielomianów można skonstruować z fizycznego punktu widzenia, po prostu dodając źródłowy człon do działania Cherna-Simonsa. W ten sposób otrzymujemy szereg w parametrze  $q$ , identyczny z szeregiem dla indeksu supersymetrycznej teorii typu  $\mathcal{N} = 2$  (po odpowiedniej identyfikacji zmiennych).

Związek między powyższymi dwoma teoriami przejawia się też na inne sposoby. Możemy wykonać rozwinięcie Wentzela–Kramersa–Brillouina (WKB) funkcji generującej dla pętli Wilsona przy dużym kolorze grupy cechowania. Wiodący wkład takiego rozwinięcia jest zakodowany w krzywej algebraicznej znanej jako wielomian A. Wielomian A jest kolejnym niezmiennikiem węzła, który dla grupy cechowania  $SU(2)$  jest definiowany jako charakterystyczna roz-maitość  $SL_2(\mathbb{C})$  dla dopełnienia węzła [13]. Analogicznie do poprzednich wielomianów węzłów, wielomian A można również uogólnić na przypadek  $SU(N)$  z dodatkowym parametrem kodującym zależność od  $N$  [14]. Wielomian A węzła, w przypadku dualnej teorii cechowania typu  $\mathcal{N} = 2$ , odgrywa podobną rolę jak krzywa Seiberga-Wittena dla czterowymiarowych teorii  $\mathcal{N} = 2$ . Wielomian ten zadaje również funkcję generującą, która zlicza klasyczne cząstki BPS<sup>2</sup>.

Powyższą dualność odkryli Ooguri i Vafa [15] w kontekście topologicznej teorii strun<sup>3</sup>. Dzięki mechanizmowi znanemu jako przejście geometryczne wynioskowali oni, że amplitudy otwartych strun topologicznych na zdeformowanym konifoldzie są powiązane z amplitudami na innej geometrii tła, zwanej rozwiązaniem konifoldem. Miało to poważne konsekwencje dla kwantowych teorii pola opisujących efektywne mody niskoenergetyczne niektórych konfiguracji strun i bran. Z jednej strony, topologiczna teoria strun w zdeformowanym konifoldzie jest opisana przez nieabelową teorię Cherna-Simonsa. Z kolei supersymetryczne teorie cechowania typu  $\mathcal{N} = 2$  opisują topologiczną teorię strun w rozwiązaniem konifoldzie, z drugiej strony przejścia geometrycznego.

Powyższa dualność ma istotne implikacje. Pozwala ona na przykład zinterpretować widma stanów BPS teorii  $\mathcal{N} = 2$  jako nowe niezmienniki węzłów, które określane są jako niezmienniki Labastida-Mariño-Ooguri-Vafa (LMOV). Jako że liczby stanów są nieujemnymi liczbami całkowitymi, niezmienniki LMOV także powinny mieć taką własność.

W ostatnim czasie odkryte zostało bardzo obiecujące podejście do udowod-

<sup>2</sup>Gdzie klasyczny oznacza, że sumujemy różne wartości spinu cząstek BPS.

<sup>3</sup>Topologiczna teoria strun jest uproszczoną wersją oryginalnej teorii strun, w której istotne są tylko topologiczne stopnie swobody. To sprawia, że topologiczna teoria strun jest teorią całkowalną, w której różne wielkości mogą być dokładnie obliczane, a zatem jest bardzo przydatna do analizy dualności wywodzących się z teorii strun.

nienia całkowitości niezmienników LMOV, które jest określane jako korespondencja węzłów-kołczanów [16–20]. Kołczan jest grafem skierowanym, a reprezentacja kołczanu przypisuje przestrzeń wektorową do każdej wierzchołka takiego grafu, oraz odwzorowanie liniowe między takimi przestrzeniami do każdej strzałki w grafie (łączy wierzchołki odpowiadające danym przestrzeniom wektorowym). Niezmienniki Donaldsona-Thomasa (DT) zadają liczbę równoważnych reprezentacji kołczanu. Okazuje się, że funkcję generującą niezmienników DT, zwaną również szeregiem kołczanowym, można utożsamiać z indeksem supersymetrycznej teorii typu  $\mathcal{N} = 2$ . W związku z tym, wspomniany wcześniej związek takich teorii z teoriami Cherna-Simonsa, prowadzi do interpretacji niezmienników DT jako niezmienników LMOV i liczby cząstek BPS. Całkowitość niezmienników DT została zapostulowana przez Kontsevicha i Soibelmiana [21], a następnie udowodniona przez Efimova [22] przy użyciu kwantowych algebr Halla. Z tego stwierdzenia oraz utożsamienia niezmienników DT i LMOV wynika zatem dowód całkowitości tych drugich niezmienników. Zatem, aby udowodnić całkowitość niezmienników LMOV dla danego węzła, wystarczy znaleźć odpowiadający mu kołczan. Dotychczas kołczany takie zostały znalezione dla nieskończonej rodziny węzłów, tzw. „arborescent knots”.

Jak już wspomnieliśmy, związki węzłów, kołczanów, supersymetrycznych teorii z cechowaniem i topologicznych strun to ogromne i w dużej mierze niezbadane terytorium. Pierwsze zagadnienie poruszone w przedstawionej rozprawie dotyczy pytania, czy różne teorie typu  $\mathcal{N} = 2$  można powiązać z tą samą obserwabłą w teorii Cherna-Simonsa – innymi słowy, czy można wiele kołczanów przypisać do tego samego węzła. Jak w rozprawie wykazujemy, odpowiedź na to pytanie jest twierdząca. To prowadzi nas do odkrycia skomplikowanej sieci dualności pomiędzy teoriami typu  $\mathcal{N} = 2$ , oraz nowych niezmienników węzłów. Drugie zagadnienie poruszone w rozprawie to wprowadzenie obiektu określanego jako wielomian A dla kołczanu. W rozprawie takie obiekty konstruujemy, opisujemy różne ich właściwości, oraz inicjujemy program klasyfikacji takich wielomianów A.

Pierwszy cel rozprawy to zbadanie sieci dualności między supersymetrycznymi teoriami cechowania typu  $\mathcal{N} = 2$ . Wyniki te przedstawione są także w pracy opublikowanej wraz z moimi współpracownikami

- H. Larraguivel, D. Noshchenko, M. Panfil and P. Sułkowski, *Nahm sums, quiver A-polynomials and topological recursion*. J. High Energ. Phys. 2020, 151 (2020).

Dualność ta wynika z faktu, że możemy przypisać dwa lub więcej kołczanów do tej samej supersymetrycznej teorii, czyli też do tego samego węzła. Kołczany takie określamy jako równoważne. Dostyc nieoczekiwanie, poza pierwszymi dwoma najprostszymi węzłami, do pozostałych węzłów przypisana jest bardzo duża liczba równoważnych kołczanów. Aby zwizualizować zawiłą sieć dualności pomiędzy równoważnymi kołczanami, przedstawiamy ją w strukturze grafu, którego wierzchołki reprezentują równoważne kołczany, a krawędzie reprezentują operację przekształcającą na siebie dwa dane równoważne kołczany. Jak w rozprawie wykazujemy, grafy takie zbudowane są z kombinatorycznych obiektów

zwanych permutohedronami. Permutohedron to obiekt przedstawiający działanie grupy permutacji, którego wierzchołki przypisane są do poszczególnych permutacji, a krawędzie do permutacji związanych z transpozycją sąsiednich elementów [23]. Jeśli tylko dualność węzłów-kołczanów zachodzi rzeczywiście dla wszystkich węzłów, to wprowadzone przez nas grafy złożone z permutohedronów mogą same w sobie stanowić nowe niezmienniki węzłów.

Drugim celem tej pracy jest konstrukcja nowych obiektów, które nazywamy wielomianami A dla kołczanów, oraz rozpoczęcie programu ich klasyfikacji. Ta część jest oparta na drugiej pracy opublikowanej z moimi współpracownikami

- H. Larraguivel, D. Noshchenko, M. Panfil and P. Sułkowski, *Nahm sums, quiver A-polynomials and topological recursion*. J. High Energ. Phys. 2020, 151 (2020).

Aby skonstruować wielomiany A, relacje rekurencyjne spełniane przez szereg kołczanowy zapisujemy jako anihilujące taki szereg operatory liniowe<sup>4</sup>. Pokazujemy, że operatory takie generują ideał wszystkich operatorów anihilujących szereg kołczanowy. Dzięki tej obserwacji jesteśmy w stanie skonstruować kwantowy wielomian A kołczanu z wykorzystaniem eliminacji nieprzemiennej<sup>5</sup>. Klasyczny wielomian A można otrzymać w odpowiednio zdefiniowanej granicy klasycznej. W dalszej części pracy klasyfikujemy wielomiany A dla kołczanów z dwoma wierzchołkami. W szczególności wykazujemy, że istnieje tylko kilka nieskończonych rodzin kołczanów dla których wielomiany A mają genus zero, oraz skończona liczba kołczanów, których wielomian A ma dany genus wyższy od zera.

Wyniki przedstawionej rozprawy doktorskiej są istotnym wkładem w badanie dualności węzłów-kołczanów. Wyniki dotyczące wielomianów A mogą także pomóc w zrozumieniu własności i asymptotyki niezmienników DT, a także ich klasyfikacji. Mamy ponadto nadzieję, że niniejsza rozprawa będzie służyć jako przystępne i zwięzłe wprowadzenie do tej tematyki.

## References

- [1] Marcos Marino. *Chern-Simons theory, matrix models, and topological strings*. International series of monographs on physics 131. Clarendon Press, 2005. ISBN: 978-0-19-856849-0.
- [2] Enore Guadagnini. *The Link Invariants of the Chern-Simons Field Theory.pdf*. Expositions in Mathematics. 1993. ISBN: 3-11-014028-4.
- [3] David Tong. “Lectures on the Quantum Hall Effect”. In: *arXiv:1606.06687 [cond-mat, physics:hep-th]* (2016).

<sup>4</sup>Ta procedura jest analogiczna do równań Schwingera-Dysona dla całki po trajektoriach.

<sup>5</sup>Jest to uogólnienie eliminacji Gaussa na zbiory równań wielomianowych ze zmiennymi nieprzemiennymi.

- [4] Cyril Closset and Heeyeon Kim. “Three-dimensional  $\mathcal{N} = 2$  supersymmetric gauge theories and partition functions on Seifert manifolds: A review”. In: *Int. J. Mod. Phys. A* 34.23 (2019), p. 1930011. DOI: [10.1142/S0217751X19300114](https://doi.org/10.1142/S0217751X19300114).
- [5] Sergey Shadchin. “On F-term contribution to effective action”. In: *J. High Energy Phys.* 2007.08 (2007), p. 052. DOI: [10.1088/1126-6708/2007/08/052](https://doi.org/10.1088/1126-6708/2007/08/052).
- [6] Sara Pasquetti. “Factorisation of  $\mathcal{N} = 2$  theories on the squashed 3-sphere”. In: *J. High Energy Phys.* 2012.4 (2012), p. 120. DOI: [10.1007/JHEP04\(2012\)120](https://doi.org/10.1007/JHEP04(2012)120).
- [7] Chiung Hwang, Hee-Cheol Kim, and Jaemo Park. “Factorization of the 3d superconformal index”. In: *arXiv:1211.6023 [hep-th]* (2013).
- [8] Abhijit Gadde. “Lectures on the Superconformal Index”. In: *arXiv:2006.13630 [hep-th]* (2020).
- [9] Vaughan F. R. Jones. “A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras”. In: *Bull. Amer. Math. Soc.* 12.1 (1985), pp. 103–111. DOI: [10.1090/S0273-0979-1985-15304-2](https://doi.org/10.1090/S0273-0979-1985-15304-2).
- [10] Edward Witten. “Quantum field theory and the Jones polynomial”. In: *Communications in Mathematical Physics* 121.3 (1989), pp. 351–399. DOI: [10.1007/BF01217730](https://doi.org/10.1007/BF01217730).
- [11] P. Freyd et al. “A new polynomial invariant of knots and links”. In: *Bull. Amer. Math. Soc.* 12.2 (1985), pp. 239–246. DOI: [10.1090/S0273-0979-1985-15361-3](https://doi.org/10.1090/S0273-0979-1985-15361-3).
- [12] Jozef H. Przytycki and Pawel Traczyk. “Invariants of links of Conway type”. In: *arXiv:1610.06679 [math]* (2016).
- [13] D. Cooper et al. “Plane curves associated to character varieties of 3-manifolds”. In: *Invent Math* 118.1 (1994), pp. 47–84. DOI: [10.1007/BF01231526](https://doi.org/10.1007/BF01231526).
- [14] Mina Aganagic and Cumrun Vafa. “Large N Duality, Mirror Symmetry, and a Q-deformed A-polynomial for Knots”. In: *arXiv:1204.4709 [hep-th]* (2012).
- [15] Hiroshi Ooguri and Cumrun Vafa. “Knot Invariants and Topological Strings”. In: *Nuclear Physics B* 577.3 (2000), pp. 419–438. DOI: [10.1016/S0550-3213\(00\)00118-8](https://doi.org/10.1016/S0550-3213(00)00118-8).
- [16] Piotr Kucharski et al. “BPS states, knots, and quivers”. In: *Phys. Rev. D* 96.12 (2017), p. 121902. DOI: [10.1103/PhysRevD.96.121902](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.96.121902).
- [17] Piotr Kucharski et al. “Knots-quivers correspondence”. In: *Adv. Theor. Math. Phys.* 23.7 (2019), pp. 1849–1902. DOI: [10.4310/ATMP.2019.v23.n7.a4](https://doi.org/10.4310/ATMP.2019.v23.n7.a4).
- [18] Tobias Ekholm, Piotr Kucharski, and Pietro Longhi. “Physics and geometry of knots-quivers correspondence”. In: *arXiv:1811.03110 [hep-th]* (2020).

- [19] Tobias Ekholm, Piotr Kucharski, and Pietro Longhi. “Multi-cover skeins, quivers, and 3d  $\mathcal{N} = 2$  dualities”. In: *J. High Energ. Phys.* 2020.2 (2020), p. 18. DOI: [10.1007/JHEP02\(2020\)018](https://doi.org/10.1007/JHEP02(2020)018).
- [20] Tobias Ekholm et al. “Branches, quivers, and ideals for knot complements”. In: *arXiv:2110.13768 [hep-th]* (2021).
- [21] Maxim Kontsevich and Yan Soibelman. “Cohomological Hall algebra, exponential Hodge structures and motivic Donaldson–Thomas invariants”. In: *Commun. Number Theory Phys.* 5.2 (2011), pp. 231–252. DOI: [10.4310/CNTP.2011.v5.n2.a1](https://doi.org/10.4310/CNTP.2011.v5.n2.a1).
- [22] Alexander I. Efimov. “Cohomological Hall algebra of a symmetric quiver”. In: *Compositio Mathematica* 148.4 (2012), pp. 1133–1146. DOI: [10.1112/S0010437X12000152](https://doi.org/10.1112/S0010437X12000152).
- [23] Günter M. Ziegler. *Lectures on Polytopes*. Vol. 152. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 1995. ISBN: 978-0-387-94365-7. DOI: [10.1007/978-1-4613-8431-1](https://doi.org/10.1007/978-1-4613-8431-1).